

脳波の複雑さの定量分析について —— その意義と方法 ——

Quantitative Analysis on Complexity of Electroencephalogram
—— Its Significance and a Method ——

藤 永 博・柴 山 健 伸⁽¹⁾
Fujinaga, Hiroshi & Shibayama, Kenshin

ABSTRACT

The electroencephalogram (EEG) has been widely used for clinical and research purposes. Although patterns of brain waves associated with certain diseases are well recognized, functional significance of rapid EEG changes (EEG complexity) in healthy individuals is not fully understood. This research note points out why it is important to analyze EEG in terms of their complexity. Also this note describes approximate entropy, which seems to be useful in quantifying EEG complexity, and summarizes briefly the results of a pilot study in which approximate entropy of normal EEG was calculated for quantitative analysis on complexity.

目 次

1. はじめに
2. 複雑さの定量分析の意義
3. 時系列の近似エントロピー
 - 3.1. 情報エントロピー
 - 3.2. 情報エントロピーの力学系への応用
 - 3.3. 時系列の近似エントロピー
4. 脳波時系列の近似エントロピー
5. むすび

(1) 主に第3節を柴山(和歌山大学システム工学部助教授)が、他の節を藤永が担当した。

1. はじめに

近年、生命の発現、生物の進化、政治・経済の動向など、極めて多岐に渡る分野の問題を「複雑さ (complexity) の理論」という共通の観点から捉えようとする試みが盛んになってきている。最近では分野を異にする研究者が複雑さをテーマに一堂に会し知恵を出し合うことも珍しくなくなった。このような動向の背景には、一見関連性のない種々の現象が「システムの複雑さの帰結」として説明できることに対する強い関心と期待がある。さらに様々な分野の問題に適用された複雑さの理論がより精緻化あるいは一般化されたシステム論として定形化されるようになったことが、最近の複雑性志向に拍車をかけていると思われる。⁽²⁾

21世紀の重要課題のひとつである脳あるいは神経システムの機能原理を解明する試みに対しても、複雑さの理論は新たな視座と方向性を提示すると期待されている。例えば、臨床研究などで広く利用されてきた脳波分析では、複雑さの理論に基づく定量分析が従来の周波数分析や時系列分析を補い、脳波の発生機序や神経生理学的意味の理解につながる新たな発想を生み出しつつある。本稿では脳波の複雑さを定量分析する意義とその具体的な方法について考えてみる。

2. 複雑さの定量分析の意義

多数の構成要素からなるシステムのマクロ行動は、要素のダイナミクスと要素間の相互作用によって決定される。複雑さの科学では、マクロ行動の複雑さは構成要素に見られる作動上のゆらぎと要素間相互作用の非線形性によってもたらされ则认为る。生体の時系列変動 (時系列データ) が示す複雑さは、システムのカップリングと環境からの刺激が増すにつれ増大する。⁽³⁾ これは非線形相互作用を介する要素間結合を強化することによって、内部秩序のロバスト性、自

(2) 例えば、生命システムをモデルとして試案された理論が、社会システムや心的システムなどの研究、さらには芸術的制作行為に関する研究にも用いられるシステム論に拡張されつつある (河本英夫 (2000), 河本英夫 (1995))。

(3) Pincus, S.M. and Goldberger, A.L. (1994)

律性 (autonomy), さらには適応能を高めていることを意味する。一般に生理学的時系列データの複雑さの低下は, 生体システムの機能低下, あるいは適応能の低下を示唆する。

正常脳波の研究では, 基礎律動 (基本波) の振幅や周波数スペクトルなどが分析の主要項目となっている。従来の定量分析では振幅や特定の周波数におけるパワースペクトルの大きさに関心が集まっていたが, 今後は波形の変化の仕方にも眼を向ける必要がある。健常者の脳波は安静時でも振幅や周波数は常に変化している。⁽⁴⁾ 安静時の正常脳波では, 主要構成波である α 波や β 波でさえ長時間安定して出現することはない。 α 波の振幅は一定ではなく, 通常 1 秒ないし数秒の周期で漸増漸減を繰り返す。振幅の変動が少ない単調な脳波が広範囲に渡って出現する時は脳に全般性の機能障害が存在することがある。また, α 波の振幅が増大した状態が続くと脳の活動水準に軽度の低下が起こっていることがある。

α 波の最も大きな特徴は知覚刺激によって抑制されることである。この α 波減衰 (α 波ブロック) と呼ばれる現象を引き起こすには光刺激が最も有効であるが, 音刺激や触刺激など他の知覚刺激によっても出現する。興味深いのは, 知覚刺激そのものが α 波減衰を起こすわけではなく, 生体にとって意味のある刺激を見たり聞いたりしようとする「注意の集中」がその原因となる点である。 α 波減衰は視覚像を想起したり, 暗算などの「精神内界」における活動によっても起こることが知られている。また α 波減衰は加齢とともに顕著でなくなることが知られている。これは老化による脳の反応性の低下と解釈されている。 β 波は体性感覚, 視覚, 聴覚などの感覚刺激に注意を集中させた時などに一次感覚野に出現する。また, 各種の認知活動に関連して振幅や周波数が変動することが知られている。その機序は大脳皮質, 視床, 脳幹の機能変化によると考えられる。

意識レベル, 精神状態, 知覚刺激, 年齢の他にも, 生体内の生理学的環境, 薬物などが脳波の変動の要因として考えられる。脳波は常に変動しており, 変動

(4) 以下の脳波の変動に関する記述は大熊輝雄 (1999) に依拠する。

の仕方には大きな個人差がある。脳の活動レベルについては、単に脳波の振幅やパワースペクトルの大きさだけで評価するのではなく、波形の動態から相対的に評価すべきである。一般に、振幅の大きな規則的な脳波は脳の活動レベルの低下を意味する。波形の複雑さを定量化し、脳の活動レベルの変化を相対的に評価することによって、脳の活動の時空間パターンと精神活動の関係を明らかにすることが重要と考えられる。

生体システムが冗長で複雑な構造をもつことは、システムの高次機能を生み出すうえで基本的な意味をもつ。大脳皮質の高次機能は、システムの構造の複雑さ、脳の電氣的活動の複雑な時空間パターンに対応していると考えられる。そうであるならば、システムは組織を保持するために、外部環境からの刺激に対して自律性をもっていなければならない。こうした考えは「作動上の閉じ (operation closure)」という概念と結びつく。

「作動上の閉じ」は Varela⁽⁵⁾ によって提唱された概念で、現在、様々な分野で取り上げられている。作動上閉じたシステムはすべて固有行動をとり、自然浮動によって変化する。システムの固有行動は構成要素の相互作用である。構成要素の相互作用はシステムの定義に関わる内部秩序 (内的コヒーレンス) を生みだし、システムの境界 (内部構造) を自己規定する。固有行動は環境がもたらす制約条件によって規制されるが規定はされない。この意味において固有行動はシステム固有のものである。

システムの組織は、システムが不統合に陥ることなく自らのアイデンティティーを保持するかぎりにおいて不変的であるが、内部構造は組織上の制約条件を満たすかぎりにおいて可変的である⁽⁶⁾。作動上閉じたシステムは、環境との相互作用のなかで自らのアイデンティティーを保持するために適応を続けている。適応とは固有行動の選択であり、選択は複雑さによって強制される⁽⁷⁾。どのような

(5) Varela, F. (1979)

(6) Varela, F. (1984)

(7) Luhmann, N. (1990)

メカニズムで選択（適応）が生じうるかは「作動上の閉じ」とそれに対応する固有行動によって示される。環境がもたらす様々な制約条件のもとで、多様な様相を呈する固有行動が間断なく構成される。これを自然浮動と呼ぶ。作動上閉じたシステムは自然浮動によって内部構造を変化させる能力をもつ。自然浮動はシステムの複雑さの源である⁽⁸⁾。

知覚、認知、思考、推論などの脳の高次機能は、ニューロン群が生成するスパイク電位の時空間パターンとして「表現」と信じられている。しかし、どのように「表現」されるか（機能原理）については明らかにされていない。脳波分析だけで脳の高次機能の原理を洞察するのは不可能であるが、特定の精神的（心理学的）事象をもたらすニューロンの活動の時空間パターン（脳波変動の複雑さ）を明らかにすることはできるのではないか。

複雑さの定量化にはいくつかの方法が考えられるが、本稿では、近似エントロピー（approximate entropy (ApEn)）による脳波の複雑さの定量分析について検討する。ApEn は Pincus⁽⁹⁾によって導入されたシステムの複雑さの指標である。生体が生み出す時系列変動の分析にもすでに応用されており、いくつかの興味深い結果が報告されている。例えば、老化に伴う複雑さの変化である。ヒトの生理学的時系列データの多くは老化とともに複雑さを失うことはよく知られている。老化に伴う見た目には明らかな変化は標準偏差などでは捉えられなかったが、ApEn によって客観的に評価できることが示された⁽¹⁰⁾。また臨床分野においても、循環器系疾患の症状の悪化に伴う時系列データの複雑さの低下や、突然死症候群を患う乳児の心拍変動の単調化が ApEn によって明らかにされた。脳波に

(8) 作動上閉じたシステムでは、作動は構成素子を産出することによって内部構造を自己規定する。神経系の場合、ニューロンの結合（シナプス結合）がシステムの構成素子となる。シナプス結合の様態は、インパルスの「伝達歴」やシナプスの生化学的状態によって規定される。さらにその様態は作動（インパルスの伝達）を通して初めて（事後的に）知ることができる。このようなシステムの作動による構成素子の産出やシステム構造の自己規定の考え方は、現在定式化が進められているオートポイエーシスと呼ばれるシステム論で議論されている。

(9) Pincus, S.M. (1991)

(10) Lipsitz, L.A. and Goldberger, A.L. (1992)

関しては、筆者の知る限りでは複雑さという観点で定量分析された前例はない。

次節では、まず ApEn の基礎となっている情報エントロピーとその力学系への応用について概説し、そのうえで ApEn の定義及び計算方法について詳述する。その後第4節で、脳波分析への応用に向けたパイロット研究の結果を簡単にまとめる。

3. 時系列の近似エントロピー

3.1. 情報エントロピー

まず、情報エントロピーについて復習する。事象空間が $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ であり、各事象の起こる確率がそれぞれ p_1, p_2, \dots, p_n , ($p_k \geq 0$, $\sum_{k=1}^n p_k = 1$) であるような確率システムを

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$$

で表わすことにする。

例として3つのシステム

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}, \quad A^{(2)} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 1.0 & 0.0 \end{pmatrix}, \quad A^{(3)} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0.9 & 0.1 \end{pmatrix}$$

を考えると、 $A^{(1)}$ は事象 A_1, A_2 のどちらが起こるかについてまったく予測ができない。 $A^{(2)}$ については A_1 がかならず起こるので予測可能である。 $A^{(3)}$ もどちらの事象が起こるか予測できないが、 A_1 の方がずっと起こりやすいという意味で、 $A^{(1)}$ より「予測不可能性」が低いと言える。

このような予測不可能性の尺度として導入された情報エントロピーは、次式で与えられる。

$$H(A) = H(p_1, p_2, \dots, p_n) = - \sum_{k=1}^n p_k \log p_k$$

ただし、 $p_k = 0$ のときには $p_k \log p_k = 0$ とする。この情報エントロピーについて次の性質 (1), (2) が成り立つことが知られている。

(1) 任意のシステム A に対して $0 \leq H(A) \leq \log n$ が成り立つ。ここで $H(A) = 0$ すなわちエントロピーが最小値をとるのは、ある i について $p_i = 1$ となるときである。これは前述の例の $A^{(2)}$ の場合に相当する。また $H(A) = \log n$ すなわちエントロピーが最大値をとるのは、すべての i について $p_i = 1/n$ となるときである。これは前述の例の $A^{(1)}$ の場合に相当する。

(2) システム

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$$

と、 A でどの事象 A_i が起こったかに依存してきまるシステム

$$B(i) = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \cdots & B_m \\ q_{i1} & q_{i2} & \cdots & q_{im} \end{pmatrix}, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

があるとする。 A で A_i が起こる確率が p_i で、 $B(i)$ で B_k が起こる確率が q_{ik} であるから、 A_i と B_k がどちらも起こる確率は $p_i q_{ik}$ である。よって、2つのシステムを組み合わせた

$$AB = \begin{pmatrix} A_1 B_1 & A_1 B_2 & \cdots & A_1 B_m & A_2 B_1 & \cdots & A_n B_m \\ p_1 q_{11} & p_1 q_{12} & \cdots & p_1 q_{1m} & p_2 q_{21} & \cdots & p_n q_{nm} \end{pmatrix}$$

を考えることができる。システム A および $B(i)$ の情報エントロピーがそれぞれ

$$H(A) = H(p_1, p_2, \dots, p_n), \quad H(B(i)) = H(q_{i1}, q_{i2}, \dots, q_{im})$$

であるとき、システム AB の情報エントロピーは、

$$H(AB) = H(A) + \sum_{i=1}^n p_i H(B(i))$$

となる。特に $B(i)$ が A に独立であるとき、(i に依存しないので各 $B(i)$ を B で表わすことにすると) $H(AB) = H(A) + H(B)$ となる。すなわち、2つのシステムを組み合わせたシステムの予測不可能性は、元の各システムの予測不可能性の和になっている。

逆に、上の性質 (1), (2) (と若干の条件⁽¹¹⁾) をみたす関数は、 $-\sum_{k=1}^n p_k \log p_k$ の形

に限られていることも知られている。

次に、マルコフ鎖の情報エントロピーを考える。状態空間を $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ とし、ある時刻で状態 A_i であったときに次の時刻で状態 A_j になる確率（遷移確率）が p_{ij} , ($p_{ij} \geq 0$, $\sum_{j=1}^n p_{ij} = 1$, $0 \leq i, j \leq n$) で与えられているとする。遷移行列を $P = (p_{ij})$ とする。遷移行列に対して、固有ベクトル $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ で、 $v_k \geq 0$, $\sum_{k=1}^n v_k = 1$ であるようなものが唯一存在する。⁽¹²⁾ それを定常分布と呼ぶ。ある時刻 t で状態 A_i であったとき、時刻 $t+1$ でどの状態になるかについて確率システム

$$A(i, t) = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_n \\ p_{i1} & p_{i2} & \cdots & p_{in} \end{pmatrix}$$

を考える。その情報エントロピーは、前と同様、

$$H_i = - \sum_{k=1}^n p_{ik} \log p_{ik}$$

となる。時刻 t での状態が定常分布 (v_1, v_2, \dots, v_n) に従っているとすると、情報エントロピーの期待値は、

$$H = H^{(1)} = \sum_{i=1}^n v_i H_i = - \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n v_i p_{ik} \log p_{ik}$$

となる。この H を、このマルコフ鎖のエントロピーと呼ぶ。これは、時刻が 1 ステップ進んだときの状態変化の予測不可能性を表わしたものといえる。時刻 t で状態 A_i であったとき、時刻 $t+1, \dots, t+r$ でそれぞれの状態になるかについての確率システムのエントロピーの期待値 $H^{(r)}$ については、前述のエントロピーに関する性質 (2) などを使って $H^{(r)} = rH^{(1)}$ となることを示すことができる。す

✓ (11) 他の条件としては、システム $A = (A_1, A_2, \dots, A_n : p_1, p_2, \dots, p_n)$ に冗長な事象を付け加えたシステム $A' = (A_1, A_2, \dots, A_n, A_{n+1} : p_1, p_2, \dots, p_n, 0)$ を考えたとき、 $H(A) = H(A')$ が成り立つという性質である。

(12) この固有ベクトルに対応する固有値は 1 である。ある時刻 t での状態が分布 (v_1, v_2, \dots, v_n) に従っているとき、固有ベクトルが遷移行列 P で不変であることから、時刻 $t+1$ での状態も同じ分布に従う。

なわち、 r ステップ分の状態変化の予測不可能性は、単純に 1 ステップ分の予測不可能性の r 倍になっている。よって、1 ステップ分の状態変化の予測不可能性を表わすエントロピー $H = H^{(1)}$ は、実質的にマルコフ鎖全体の予測不可能性を表わしているといえる。

マルコフ鎖の情報エントロピーの計算例を与えよう。

(a) 遷移確率の行列が

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

で与えられるマルコフ鎖の定常分布は $v = (v_1, v_2) = (0.5, 0.5)$ である。その情報エントロピーは

$$H = -0.5 \cdot (0.5 \log 0.5 + 0.5 \log 0.5) - 0.5 \cdot (0.5 \log 0.5 + 0.5 \log 0.5) = \log 2$$

である。

(b) $p_0 = (\sqrt{5} - 1)/2$, $q_0 = (5 - \sqrt{5})/10$ とする。 $p_0^2 = 1 - p_0$ であることに注意する。遷移確率の行列が

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p_0^2 & p_0 \end{pmatrix}$$

で与えられるマルコフ鎖の定常分布は $v = (v_1, v_2) = (q_0, 1 - q_0)$ である。その情報エントロピーは

$$\begin{aligned} H &= -q_0 \cdot (0 \log 0 + 1 \log 1) - (1 - q_0) \cdot (p_0^2 \log p_0^2 + p_0 \log p_0) \\ &= \log \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \end{aligned}$$

である。

3.2. 情報エントロピーの力学系への応用

力学系とは、状態の変遷を微分方程式などで記述したものであり、通常は変遷が確率的ではない場合を考える。ここでは簡単な力学系の場合のみを扱うこと

とし、数学的厳密さを追求しないでおく。対象とする空間を k 次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^k とし、 \mathbb{R}^k からそれ自身への繰り返し写像 f を考える。

$$\mathbf{x}_{n+1} = f(\mathbf{x}_n), \quad \mathbf{x}_n, \mathbf{x}_{n+1} \in \mathbb{R}^k$$

写像 f によって、時刻 n における点 \mathbf{x}_n から時刻 $n+1$ における点 \mathbf{x}_{n+1} が決まるので、その意味では予測不可能性はない。しかし、応用上では様々な「誤差」⁽¹³⁾ によって長時間経過したあとの予測が困難になることがある。このようなことは、ある 2 点 $\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n \in \mathbb{R}^k$ が互いに近くても、ある時間 m が経過したあとで $\mathbf{x}_{n+m} = f^m(\mathbf{x}_n)$, $\mathbf{y}_{n+m} = f^m(\mathbf{y}_n)$ が互いに離れてしまうことがあるような力学系において起こりうる。

さて、この性質をもち、かつ \mathbf{x}_n が発散しない場合を考える。 \mathbf{x}_n から出発して m 時間経過したあとで \mathbf{x}_{n+m} が \mathbf{x}_n のすぐ近くに帰ってきたとする。上の性質が成り立っているとすると、その後の m 時間ごとの挙動は、最初の m 時間の挙動をほぼそのまま繰り返すとは限らない。すなわち \mathbf{x}_n から出発する点列（解または軌道と呼ぶ）の挙動は規則的とは限らない。規則的でない解を多く含む力学系は、複雑な力学系であるといえる。この意味で、力学系の不規則性・複雑さと力学系の解の予測不可能性とは密接に関連していると言える。

次に、前節で導入したマルコフ鎖のエントロピーを、力学系に応用する方法について見る。まず、対象とする空間 \mathbb{R}^k （の中で本質的に重要な領域）を有限個の領域 A_1, A_2, \dots, A_n に分割する。これらの領域は写像 f によって、 $f(A_1), f(A_2), \dots, f(A_n)$ に移される。それらの $f(A_i)$ は複数の A_j と交わりうる。領域の大きさを測るある関数（測度と呼ばれる） $\mu(\cdot)$ と、 A_i と $f^{-1}(A_j)$ の重なる割合を用いて

$$p_{ij} = \frac{\mu(A_i \cap f^{-1}(A_j))}{\mu(A_i)}$$

(13) 外部からの小さなノイズ、点の座標を測定するときの精度が有限であること、計算機シミュレーションにおける丸め誤差など。

を定義する。 p_{ij} は A_i の中で A_j に移る点の割合を表わすことになる。多くの力学系では、うまく領域 A_1, A_2, \dots, A_n および測度 μ を選ぶことによって、 A_1, A_2, \dots, A_n を状態とし p_{ij} を遷移確率とするマルコフ鎖とみなすことができる。すなわち、力学系を点から点への変遷として見ないで、領域から領域への変遷として見ることにより、確率論的な要素を導入する。この力学系のエントロピーを、マルコフ鎖とみなした時の情報エントロピーとして定義する。すなわち、力学系をマルコフ鎖としてみなしたときの予測不可能性を測る量を、その力学系の不規則性・複雑性を測る量として定義する。

簡単な例として、次のような力学系 (a) を考える。対象とする空間を実直線 \mathbb{R} とし、 $x \in \mathbb{R}$ について $f(x) = 1 - 2|x|$ と定義する。図 1 の左図が $f(x)$ のグラフである。本質的な領域として線分 $A_1 = [-1, 0]$, $A_2 = [0, 1]$ を考える。写像 f は線分 A_1 , A_2 それぞれを 2 倍に引き伸ばして A_1 と A_2 を合わせた線分 $[-1, 1]$ 全体に移す。この力学系をマルコフ鎖とみなしたときの遷移確率の行列は、前節のマルコフ鎖の例 (a) と考えることができる。よって、そのエントロピーは $\log 2$ である。

また、次のような力学系 (b) を考える。対象とする空間は \mathbb{R} で、 $f(x) = 1 - (\sqrt{5} + 1)/2 |x|$ と定義する。図 1 の右図が $f(x)$ のグラフである。図中

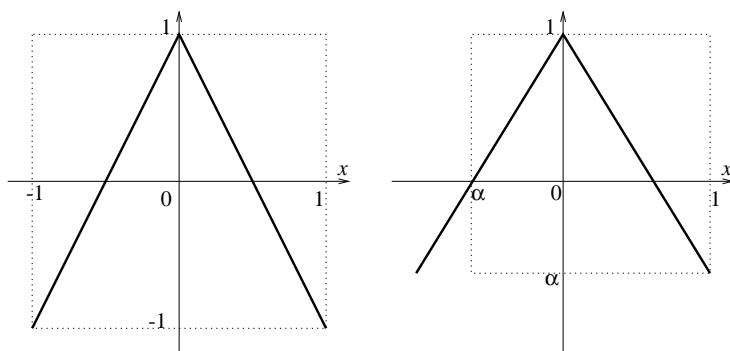


図 1: 力学系の例 ($f(x) = 1 - a|x|$) で左が $a = 2$, 右が $a = (\sqrt{5} + 1)/2$

$\alpha = -(\sqrt{5}-1)/2$ である。線分として $A_1 = [\alpha, 0]$ と $A_2 = [0, 1]$ をとる。写像 f は A_1 を引き伸ばして A_2 に移し, A_2 を引き伸ばして A_1 と A_2 を合わせた線分 $[\alpha, 1]$ に移す。力学系 (a) では A_1 の点が A_1 , A_2 のどちらにも移りえたのに対して, 力学系 (b) では A_1 の点の移り先は A_2 に決まっている。この意味で (b) の方が (a) より複雑性が低いと言える。この力学系をマルコフ鎖とみなしたときの遷移確率の行列は, 前節のマルコフ鎖の例 (b) と考えることができる。そのエントロピーは $\log \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ である。

3.3. 時系列の近似エントロピー

時系列の不規則性を測るために, Pincus⁽¹⁴⁾ は ApEn を導入した。この ApEn は次のようにして定義される。

時系列データの大きさを N とし, 次元を表わす m と数値間の距離のある種の閾値を表わす r の2個のパラメータを設定する。時系列データ $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$ から m 次元ベクトル

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_1 &= (x_1, x_2, \dots, x_m), \quad \mathbf{x}_2 = (x_2, x_3, \dots, x_{m+1}), \quad \dots, \\ \mathbf{x}_i &= (x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+m-1}), \quad \dots, \\ \mathbf{x}_{N-m+1} &= (x_{N-m+1}, \dots, x_N, x_N)\end{aligned}$$

をつくる。2個のベクトル $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$ と $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)$ の間の距離を

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_{i=1, \dots, m} |x_i - y_i|$$

で定義し, この距離を用いて

$$C_i^m(r) = \frac{\#\{j | d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \leq r\}}{N-m+1}$$

と置く。 $C_i^m(r)$ は $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{N-m+1}\}$ の中で \mathbf{x}_i に近いベクトルの割合を表わしてい

(14) Pincus, S.M. (1991)

(15) 近いということを, 距離が r 以内ということで判定している。その意味で r は距離のある種の閾値であると述べた。

る。次に

$$\Phi^m(r) = \frac{1}{N-m+1} \sum_{i=1}^{N-m+1} \log C_i^m(r)$$

と置き、

$$\text{ApEn}(m, r, N) = \Phi^m(r) - \Phi^{m+1}(r)$$

で ApEn を定義する。

さて上式は、 $N \gg m$ のとき

$$\text{ApEn} \approx -\frac{1}{N-m} \sum_{i=1}^{N-m} \log \frac{C_i^{m+1}(r)}{C_i^m(r)}$$

と近似的に変形できる。ここで $C_i^{m+1}(r)/C_i^m(r)$ は、 m 次元ベクトル $\mathbf{x}_i^{(m)} = (x_i, \dots, x_{i+m-1})$ に近いベクトルの個数に対する $(m+1)$ 次元ベクトル $\mathbf{x}_i^{(m+1)} = (x_i, \dots, x_{i+m})$ に近いベクトルの個数の割合を表わしている。元の時系列データについて言えば、その時系列の中の長さ m のある部分 $(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+m-1})$ に近い $(x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+m-1})$ の中で、さらに次の x_{j+m} も x_{i+m} に近いものの割合を表わしている。ApEn は時系列の中の互いに近い部分に対し、それがさらに近くにとどまる割合を評価したものであるといえる。

前節で述べたように、互いに近くにいた軌道が離れることがあるということが、複雑な力学系の一つの特徴であった。時系列がある力学系から生じたものと仮定したとき、 $C_i^{m+1}(r)/C_i^m(r)$ が 1 より小さい程、互いに離れていく軌道の割合が多いことになる。その対数をとって平均をとり、符号を変えたものが ApEn であるから、互いに離れていく軌道の割合が多いほど ApEn の値は 0 より大きくなる。

ApEn は次のような関係で、情報エントロピーを力学系に適用したものの近似になっている。前節で述べたような力学系から生じる時系列 $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ を考える。うまく区間 A_1, A_2, \dots, A_n がとれるものとし、さらに各区間の長さより r が小さいとする。時系列の点 x_i が区間 A_k 内にあるとき、それを A_k の中心点 c_i で近似し、近似時系列 $\{c_1, c_2, \dots, c_N\}$ を考える。区間の取り方と r の決め方と

$\{c_i\}$ の取り方により,

「 x_i と x_j が同じ区間に入る」

\iff 「 c_i と c_j は一致する」

\iff 「 c_i と c_j の距離は r 以下である」

が成り立つ。近似時系列 $\{c_1, c_2, \dots, c_N\}$ について $C_i^m(r)$ を計算することは、元の時系列の $\mathbf{x}_i^{(m)} = (x_i, \dots, x_{i+m-1})$ に対して x_{i+l} と x_{j+l} が同じ区間に入るような $\mathbf{x}_j^{(m)}$ を数えることになる。区間 A_1, A_2, \dots, A_n の中の m 個の直積（重複を許す）を、 $\mathbf{k} = (k_0, k_1, \dots, k_{m-1})$ に対して

$$A_{\mathbf{k}}^{(m)} = A_{k_0} \times A_{k_1} \times \dots \times A_{k_{m-1}}$$

で表わすことにする。 $A_{\mathbf{k}}^{(m)}$ は \mathbb{R}^m 内の領域である。 \mathbf{c}_i について $C_i^m(r)$ を計算することは、 \mathbf{x}_i と同じ領域 $A_{\mathbf{k}}^{(m)}$ に入るような \mathbf{x}_j を数えることになると言い換えられる。

ここで時系列データが十分多く得られたとして、そのデータを確率論的に扱えるものと仮定する。 m 次元ベクトル $\mathbf{c}_i^{(m)} = (c_i, c_{i+1}, \dots, c_{i+m-1})$ に対して、 $P(\mathbf{c}_i^{(m)}) = C_i^m(r) / (N - m + 1)$ と置く。これは $\{\mathbf{c}_j^{(m)}\}$ の中でベクトル $\mathbf{c}_i^{(m)}$ に一致するものの割合（確率）を表わしている。元の時系列で言えば、 $\mathbf{x}_j^{(m)}$ が $\mathbf{x}_i^{(m)}$ と同じ領域 $A_{\mathbf{k}}^{(m)}$ に入る確率を表わしている。これは領域 $A_{\mathbf{k}}^{(m)}$ に入る点の割合を表わすことになるので、前節のようにマルコフ鎖とみなしたときの定常分布にあたる量を表わしていることになる。

$$\begin{aligned} P(\mathbf{c}_i^{(m+1)}) &= P(\mathbf{c}_i^{(m)}) \cdot P(c_{i+m} | \mathbf{c}_i^{(m)}) \\ &= P(\mathbf{c}_i^{(m)}) \cdot P(\mathbf{c}_{i+1}^{(m)} | \mathbf{c}_i^{(m)}) \end{aligned}$$

である。ここで $P(c_{i+m} | \mathbf{c}_i^{(m)})$ は $\mathbf{c}_j^{(m)} = \mathbf{c}_i^{(m)}$ のときに $c_{j+m} = c_{i+m}$ となる条件付確率を表わしていて、明らかに $\mathbf{c}_j^{(m)} = \mathbf{c}_i^{(m)}$ のときに $\mathbf{c}_{j+1}^{(m)} = \mathbf{c}_{i+1}^{(m)}$ となる条件付確率 $P(\mathbf{c}_{i+1}^{(m)} | \mathbf{c}_i^{(m)})$ に等しい。後者を元の時系列について言えば、 $\mathbf{x}_j^{(m)}$ が $\mathbf{x}_i^{(m)}$ と同じ領域 $A_{\mathbf{k}}^{(m)}$ に入るときに $\mathbf{x}_{j+1}^{(m)}$ が $\mathbf{x}_{i+1}^{(m)}$ と同じ領域 $A_{\mathbf{k}'}^{(m)}$ に入る条件付確率を表わし

ている。これは $A_k^{(m)}$ の中で $A_{k'}^{(m)}$ へ移る点の割合を表わしていることになるので、マルコフ鎖とみなしたときの遷移確率を表わしていることになる。

さて、

$$\frac{C_i^{(m+1)}(r)}{C_i^{(m)}(r)} = \frac{(N-m) \cdot P(\mathbf{c}_i^{(m+1)})}{(N-m+1) \cdot P(\mathbf{c}_i^{(m)})} \approx P(\mathbf{c}_{i+1}^{(m)} | \mathbf{c}_i^{(m)})$$

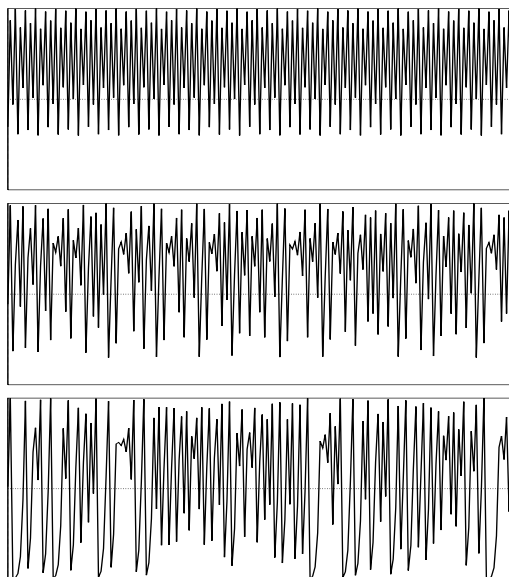
であるから、ApEn を計算するときの $C_i^{(m+1)}(r) / C_i^{(m)}(r)$ の部分は、この意味でマルコフ鎖の遷移確率を表わしている。さらに、 $\mathbf{c}_i^{(m+1)} = \mathbf{c}_{i'}^{(m+1)}$ のとき、 $\log(C_i^{(m+1)}(r) / C_i^{(m)}(r))$ が $\log(C_{i'}^{(m+1)}(r) / C_{i'}^{(m)}(r))$ と同じ値をとることに注意すると、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N-m} \sum_{i=1}^{N-m} \log \frac{C_i^{(m+1)}(r)}{C_i^{(m)}(r)} \\ &= \sum_{\mathbf{c}_i^{(m+1)}} \frac{C_i^{(m+1)}(r)}{N-m} \log \frac{C_i^{(m+1)}(r)}{C_i^{(m)}(r)} \\ &\approx \sum_{\mathbf{c}_i^{(m+1)}} P(\mathbf{c}_i^{(m+1)}) \log P(\mathbf{c}_{i+1}^{(m)} | \mathbf{c}_i^{(m)}) \\ &= \sum_{\mathbf{c}_i^{(m)}, \mathbf{c}_{i+1}^{(m)}} P(\mathbf{c}_i^{(m)}) \cdot P(\mathbf{c}_{i+1}^{(m)} | \mathbf{c}_i^{(m)}) \log P(\mathbf{c}_{i+1}^{(m)} | \mathbf{c}_i^{(m)}) \end{aligned}$$

となる。前述のように $P(\mathbf{c}_i^{(m)})$ の部分が定常分布を表わし、 $P(\mathbf{c}_{i+1}^{(m)} | \mathbf{c}_i^{(m)})$ の部分が遷移確率を表わしているので、この最後の表記は、マルコフ鎖のエントロピーを表わす式に一致する。

簡単な力学系から生じる時系列を適当にとつて、ApEn を計算した結果を紹介する。1 次元力学系 $f(x) = 1 - ax^2$ を考え、パラメータ a の値が $a = 1.4, \dots, 2.0$ の場合の ApEn を計算している。計算に際して、 $N = 1000$, $m = 2$, $r = 0.05$ と設定した。ApEn の計算結果は表 1 にまとめてある。いくつかの場合の時系列は、図 2 のようになっている。図 2 で横軸は時間を表わし、範囲は $0 \sim 200$ である。縦軸は x の値を表わし、範囲は $-1 \leq x \leq 1$ である。

いずれの a の値の場合も時系列は規則的ではないが、 $a = 1.4$ のときは周期 8 の周期軌道に近くかなり規則的である。 $a = 1.7$ と $a = 2.0$ のときは不規則になっ

図 2：1次元写像の時系列(上から $a = 1.4, 1.7, 2.0$)

ているが、 $a = 2.0$ の方が偏りが少なくより完全な乱数に近づいている。他の a の値についても、 a の値が増えるにしたがって不規則性が高くなっていく傾向があることが、⁽¹⁶⁾ ApEn を計算した結果から見て取れる。

パラメータ a	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
ApEn	0.115	0.276	0.397	0.445	0.418	0.539	0.678

表 1：1次元写像の ApEn

4. 脳波時系列の近似エントロピー

安静時正常脳波の ApEn に関するパイロット研究から得られたいくつかの所見をまとめる。この研究では、安静閉眼及び開眼時に測定された脳波について

(16) 実際には途中で安定周期軌道が現れるところがあり、一時的に規則性が高くなる所がある。

ApEn の計算を試みた。脳波は耳朶部位の基準電極と 10/20 法により配置された皿電極の間で記録された。⁽¹⁷⁾ 脳波測定中、被検者はソファに座った状態で、1 分間ずつ閉眼と開眼を繰り返した。記録された脳波には異常波形は認められなかった。閉眼時は α 波が優位で、開眼すると α 波減衰が起こり速波化の傾向が見られた。ApEn は 5 秒間のデータについて計算された。⁽¹⁸⁾ 閉眼と開眼の状態で測定された 1 分間の脳波からアーティファクトを含まない 5 秒間分のデータを 5 セットずつ取り出した。計算のための入力パラメーターは、 $N = 1000$, $m = 2$, $r = 1$ に設定した。これらの値は Pincus らが推奨した範囲内である。⁽¹⁹⁾

図 3 に左頭頂部 (P3) と右頭頂部 (P4) から導出された最初の 4 分間の脳波について計算した ApEn を示した。閉眼時と開眼時の ApEn の値が横軸方向に 5

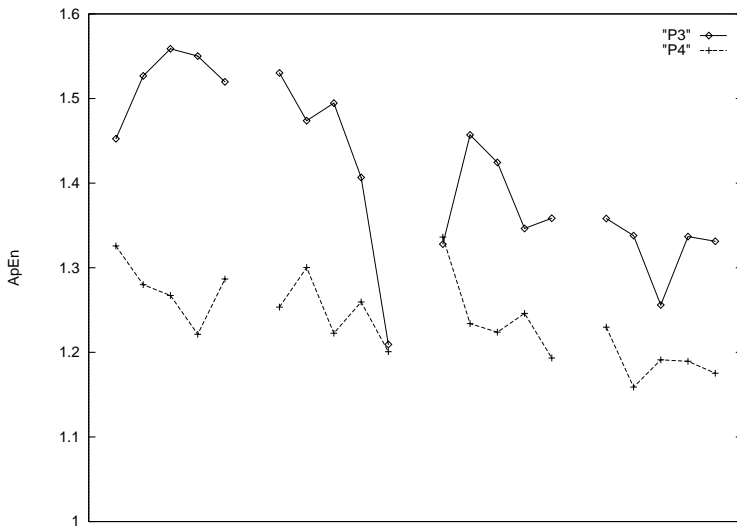


図 3：脳波の近似エントロピー

(17) 脳波測定については九州大学健康科学センターの橋本公雄教授の協力を得た。

(18) 脳波のアナログデータは 200 Hz でデジタル変換された。従って、5 秒間分のデータは 1000 個の数値からなる。

(19) Pincus, S.M. and Goldberger, A.L. (1994)

つずつ交互にプロットされている⁽²⁰⁾。この被検者では、閉眼時と開眼時の ApEn にほとんど差は認められないが、左右差が顕著であり、また時間の経過とともに ApEn は低下する傾向にある⁽²¹⁾。測定の状況から考えると、開眼中被検者には何かを見ようとする意志（注意の集中）はなく、光刺激は被検者にとって意味のあるものではなかったため、開眼時の脳の活動レベルは閉眼時と大差がなかったと推察される。

閉眼時と開眼時の脳波では優位な周波数成分が異なる。振幅の大きさも著しく異なる。にもかかわらず、ApEn で数量化された複雑さには大きな差が認められない点は注目すべきであろう。この被検者に認められた ApEn の低下傾向は、時間経過に伴う覚醒レベルの低下によると考えられるが、ApEn の左右差が何を意味するのか、安静時の ApEn の左右差が一般的な現象なのか、現時点では明らかではない。今後さらにデータを集め、分析を進める必要がある。

5. むすび

脳波の ApEn については、計算上の入力パラメーターの問題、解釈上の問題等が数多く残されている。これらについては次の機会に詳しく取り上げてみたいが、解決の糸口は、様々な状況で測定された脳波について実際に ApEn を計算し比較する試みの中で見出されると考えている。

参考文献

- Lipsitz, L.A. and Goldberger, A.L. (1992) Loss of Complexity and Aging.
Journal of the American Medical Association, 267(13): 1806-1809.
Luhmann, N. (1990) Essays on Self-Reference, Columbia University Press, (訳:『自己言及性について』土方透・大澤善信訳, 国文社)
Pincus, S.M. (1991) Approximate Entropy as a measure of system complexity.

(20) 明らかなアーティファクトが含まれている部分を取り除いているので、データの取り出しは必ずしも等時間間隔になされていない。

(21) 現在はパイロット研究の段階で被検者が少なく、これらの所見が安静時の正常脳波に共通するものかどうかは分からない。

- Proceedings of National Academy of Science U.S.A. 88 : 2297-2301.
- Pincus, S.M. and Goldberger, A.L. (1994) Physiological time-series analysis : what does regularity quantify? American Journal of Physiology 266 : H1643-1656.
- Varela, F. (1984) Two Principles of Self-Organization. In: Ulrich, H and Probst, G. J. B. : Self-Organization and Management of Social Systems - Insights, Promises, Doubts, and Questions, Springer Verlag GmbH & Co. KG, (訳 : 『自己組織化とマネジメント』 徳安彰訳, 東海大学出版会)
- Varela, F. (1979) Principles of Biological Autonomy, North Holland / Elsevier.
- 大熊輝雄(1999) 臨床脳波学, 第5版, 医学書院
- 河本英夫(2000) オートポイエーシスの拡張, 青土社
- 河本英夫(1995) オートポイエーシス, 第三世代システム, 青土社